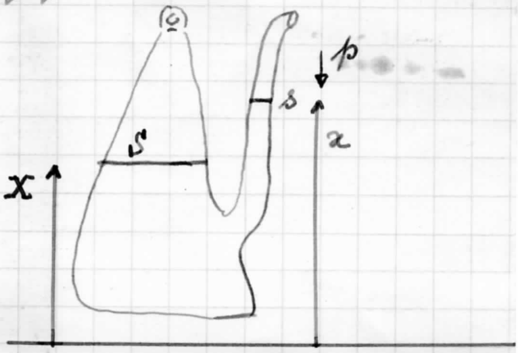
Baromètre Liégeois

1/ **Hypothèses**: Température constante – négliger la capillarité pas de tension de vapeur ni hygrométrie.

2/ Formule générale:



La pression à mesurer p s'exprime facilement, quelle que soit la forme du réservoir, en fonction de deux variables (x, X) c'est à dire les niveaux dans le tube et le réservoir. Cependant ces deux variables ne sont pas indépendantes et leur relation dépend de la forme du réservoir.

En formules:

$$\begin{cases} p = \left\{ p_0 - \rho (X_0 - x_0) \right\} \cdot \left\{ \dfrac{l_0 + x_0}{l_0 + x} \right\} + \rho (X - x) & (1) \\ s(x)\, dx = - S(X)\, dX & (2) \end{cases}$$

ou, si s est c^{te}: $s(x - x_0) = \int_X^{X_0} S(X)\, dX$

où:
- p = pression atmosphérique à mesurer
- p_0 = " à l'instant initial (un instant choisi arbitrairement)
- x = hauteur dans le tube
- X = hauteur dans le réservoir
- x_0 = " à l'instant initial (dans le tube) } origine arbitraire
- X_0 = " " " " (dans le réservoir)
- ρ = poids spécifique de l'eau ($= 1 g/cm^3 = 981$ dynes$/cm^3$)
- $S(X)$ = section du réservoir à hauteur X
- $s(x)$ = " " tube " " x. Nous la supposerons constante (mais cette restriction peut facilement être levée)
- $l_0 = \dfrac{V_0}{s}$ où V_0 est le volume rempli par l'air dans le réservoir, à l'instant initial.

La forme du réservoir intervient donc par $S(X)$ et V_0.

(1) donne p en fonction de x et X et il faut essayer de déterminer $X(x)$ de (2).

3/ Formule simplifiée.

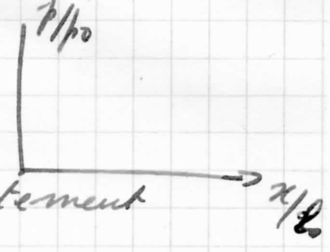
Une simplification est introduite si l'on suppose qu'à l'instant initial les niveaux du tube et du réservoir sont à même hauteur ($x_0 = X_0$). Cette hypothèse n'est évidemment pas indispensable; elle dépend donc des conditions de remplissage du baromètre

On prendra évidemment ce niveau initial comme origine ($x_0 = X_0 = 0$)

$$\begin{cases} p = \dfrac{p_0\, l_0}{l_0 + x} + \rho (X - x) & (3) \\ s x = - \int_0^X S(X)\, dX \quad \rightarrow \text{d'où } X(x) \text{ pour } (3) & (4) \end{cases}$$

A tout hasard, je signale que ces formules peuvent être mises sous "forme réduite" ce qui diminue le nombre de paramètres intervenant

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{l_0}\right)} + \left\{\frac{\rho l_0}{p_0}\right\}\left(\frac{X}{l_0} - \frac{x}{l_0}\right) \qquad (3^{bis})$$



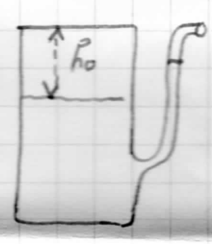
On pourra en effet tracer des abaques de p/p_0 en fonction de x/l_0 avec comme seul paramètre $\left\{\frac{\rho l_0}{p_0}\right\}$ - Cependant pour mieux voir directement la sensibilité, j'ai gardé la 1° version (3)

Pour tracer le graphique, il faut donc préciser la forme. J'ai examiné les formes suivantes:

1) Réservoir cylindrique
2) Réservoir conique

pour les constantes: $p_0 = 1$ atmosph $= 10^6$ baryes
$\rho = 981$ dynes/cm^3
$s = 1$ cm^2

4) Cas du réservoir cylindrique (S est constant)



$$\frac{p}{p_0} = \frac{l_0}{l_0+x} + \frac{\rho}{p_0}(X-x) \qquad sx = -S X$$

et donc

$$\boxed{\frac{p}{p_0} = \frac{l_0}{l_0+x} - \frac{\rho}{p_0}\left(1+\frac{s}{S}\right)x}$$

Nous prendrons ici $S = 20$ cm^2 (∅ environ 5 cm) mais la formule montre que la courbe n'en dépendra pas beaucoup. Le paramètre de loin le plus important est évidemment

$l_0 = \frac{V_0}{s} = h_0 \cdot \frac{S}{s} = 20\, h_0$, h_0 = hauteur du réservoir au début (cad lorsque $p = p_0$ et les 2 niveaux à même hauteur)

J'ai pris 3 valeurs pour h_0:

$h_0 = 5$ cm, $h_0 = 10$ cm, $h_0 = 20$ cm.

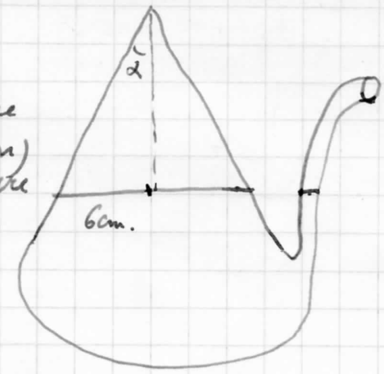
et les résultats sont représentés au 1° graphique.

On voit immédiatement que la plus grande sensibilité est atteinte pour h_0 aussi petit que possible

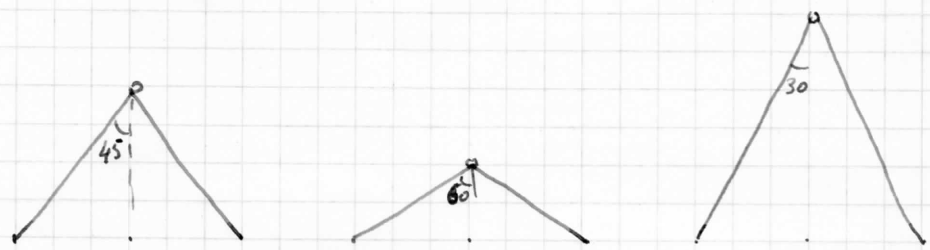
En particulier, le cas du "Contraroleur" que vous m'avez signalé entre dans cette catégorie ($s = S$)

5) Cas du réservoir conique

Nous avons pris comme base du cone la surface libre dans le réservoir à l'instant 0 (6 cm de rayon) et avons pris trois cas, d'après l'angle d'ouverture



$\alpha = 45°$, $30°$ et $60°$



On obtient les valeurs de $V_0 = \frac{\pi R^2}{3} \cdot h_0 = 72 \pi \cot \alpha \left\{ \begin{array}{ll} l_0 = 391 & \text{pour } \alpha = 30° \\ 226 & 45° \\ 131 & 60° \end{array} \right.$

et les 3 graphiques correspondants. (les calculs sont faits à la règle je ne puis en garantir la précision à plus de 2-3 %)

C'est donc celui à 30° (<u>le plus aplati</u>) qui est le plus sensible.

Cependant, je suis convaincu que ce n'est pas tellement la <u>forme</u> qui intervient dans la sensibilité que le paramètre l_0

car, dans (3) le 2nd terme du 2nd membre ($g(X-x)$) n'intervient que pour quelques % dans l'allure générale de la courbe.